Serie 8

1. Gegeben seien $\lambda > 0$ und eine Zufallsvariable X mit Werten in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und

$$\mathbb{P}[X = n] = c\frac{\lambda^n}{n!} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

a) Bestimmen Sie die Konstante c.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

c) Es sei Y eine von X unabhängige Zufallsvariable, die poissonverteilt mit Parameter λ ist, d.h.

$$\mathbb{P}[Y = n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Geben Sie zu jedem der folgenden Ausdrücke an, ob er gleich oder ungleich $\mathbb{P}[X = n]$ ist, wobei $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ll}
(\mathbf{A}) & \mathbb{P}[X = Y \mid Y = n] \\
(\mathbf{B}) & \mathbb{P}[0 \neq Y = n] \\
(\mathbf{C}) & \mathbb{P}[Y = n \mid Y \neq 0] \\
(\mathbf{D}) & \mathbb{P}[Y \neq 0 \mid Y = n] \\
(\mathbf{E}) & \mathbb{P}[X = n \mid Y = 0]
\end{array}$$

2. k Jäger schiessen gleichzeitig je einmal auf einen Schwarm aus m Enten. Sie suchen sich unabhängig voneinander die Ente aus, auf die sie zielen, und treffen diese unabhängig voneinander und unabhängig von der Wahl der Ente mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$.

Führen Sie für jede Ente $n \leq m$ eine Zufallsvariable X_n ein, die angibt, ob die Ente getroffen wurde oder nicht. D.h. es soll gelten $\{X_n = 1\} = \{n\text{-te Ente nicht getroffen}\}$ und $\{X_n = 0\} = \{n\text{-te Ente getroffen}\}$.

a) Welche Verteilung hat X_n für $n = 1, \ldots, m$?

b) Wie gross ist die erwartete Anzahl unverletzter Enten?

Bitte wenden!

c) Sind die Ereignisse $\{X_n = 0\}$, $n = 1, \dots, m$ unabhängig? Untersuchen Sie nur den Fall $k < m$.

3. In einer Urne sind N weisse und M schwarze Kugeln. Es werden $n \leq N + M$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Sei X die Anzahl gezogener weisser Kugeln.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von X.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
Hinweis: Benützen Sie die Linearität des Erwartungswertes.